12.
Derivadas*

1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{5}$ en los intervalos $[3,8]$ y $[2,4]$.

2. Halla la tasa de variación instantánea, de la función $f(x) = x^2 - x + 1$, en los puntos $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$ y $x_0 = 0$.

3. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 1$ en el punto $(1,1)$.

4. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \leq 4 \\ 2x - 6 & x > 4 \end{cases}$ ¿Es continua en $x = 4$? ¿Puede ser derivable en $x = 4$? Justifica la respuesta.

5. Prueba que las dos siguientes funciones no son derivables en $x_0 = 0$ usando la definición de derivada.
   $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$ y $f(x) = x^{1/3}$.

6. Estudia la derivada en el punto $x_0 = 1$ de las funciones
   a) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^3, & x \geq 1 \end{cases}$

7. Estudia si la función $f(x) = \dfrac{1}{2}x|x|$ es derivable en $x_0 = 0$.

8. Se sabe que la función $g(x)$ es continua en $x_0 = 0$ pero no es derivable en $x_0 = 0$. Prueba que $f(x) = xg(x)$ es derivable en $x_0 = 0$ y que $f'(0) = g(0)$.

9. Halla los puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ con pendiente 0, 1 ó -1.

10. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las funciones que siguen en los puntos indicados:
    a) $f(x) = \sqrt{x^2+9}$ en $(4,5)$.
    b) $f(x) = (x - \dfrac{2}{x})^4$ en $(2, f(2))$.
    c) $f(x) = \dfrac{5}{x^2+6}$ en $(-3, f(-3))$.

11. Encuentra los puntos de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+9}$ cuya tangente sea horizontal.

12. Encuentra los puntos de la curva de ecuación $y = \dfrac{x-3}{x+3}$ cuya pendiente sea $\dfrac{1}{6}$.

*Estos ejercicios han sido extraídos del libro de bachillerato MATEMÁTICAS I de la EDITORIAL LA Ñ, cuyos autores son Francisco Benítez, Juan Luis Romero, Eloy Fernández, José Manuel Díaz, Alfredo Domínguez y Octavio Ariza. Se recomienda su lectura para la realización de estos ejercicios.

13. Representa la función $f(x) = |x^2 - 9|$. ¿En qué puntos no es derivable?

14. Calcula la pendiente de la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ en su intersección con el eje OX.

15. En cada una de las dos figuras que siguen se han representado dos curvas. Una de ellas corresponde a la gráfica de una función y la otra a la gráfica de su derivada. En cada caso, determina la curva que corresponde a la función y la que corresponde a la derivada.

16. En una cierta fábrica, el coste de la fabricación de p kilogramos de un producto es $C(p) = 0.1p^2 + 30p + 50$ pesetas. Durante las t primeras horas de trabajo se producen $p(t) = 4.5t^2 + 200t$ kilogramos. Determina la tasa de variación del coste de la producción al cabo de 2 horas de comenzar esa producción.

17. Calcula las derivadas de las funciones definidas, en sus respectivos dominios de definición, por

a) $\dfrac{3x^2 - 4x}{x^3}$.	b) $\sqrt{x} - x\sqrt{x}$.
c) $\dfrac{x-1}{x+1}$.	d) $(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}}$.
e) $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$.	f) $e^{\sqrt{x}}$.
g) $\dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$.	h) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
i) $e^{-\frac{1}{x^2}}$	j) 5^{x-2}.
k) $x^2 2^x$.	l) $\ln(x^2 + 1)$.
m) $(\ln x)^3$.	n) $\ln(\dfrac{x}{x+1})$.
ñ) $\log_5 \sqrt{x^5 + 1}$.	o) $x^2 \operatorname{sen} x$.
p) $\operatorname{tg} x - x$.	q) $\cos 3x$.
r) $\operatorname{sen}^2 x$.	s) $\cos^2 \pi x$.
t) $e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$.	u) $e^{\operatorname{tg} x}$.
v) $\arccos 2x$.	w) $\operatorname{arcsen} \dfrac{x+1}{5}$.

18. Una función $f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

   (a) $f'(-1) = 0$, $f'(3) = 0$.
   (b) $f'(x) > 0$, si $x < -1$ o si $x > 3$.
   (c) $f'(x) < 0$, si $-1 < x < 3$.

   Dibuja la gráfica de una función con esas propiedades.

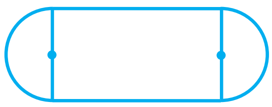
19. Una determinada función $f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

(a) $f'(x) > 0$, si $x < -3$ o si $x > 3$.
(b) $f'(x) < 0$, si $-3 < x < 3$.
(c) $f''(x) < 0$, si $x < 0$.
(d) $f''(x) > 0$, si $x > 0$.
(e) $f(0) = 0$.

Dibuja una posible gráfica de f.

20. Halla las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia de radio 4.

21. En los campeonatos de atletismo en pista cubierta se utilizan recintos como el de la figura. Se sabe que el perímetro total debe ser de 200 m. Determina las dimensiones del recinto para que el rectángulo central tenga área máxima.



22. Un labrador tiene una pequeña plantación de patatas y desea saber cuál es el momento más oportuno para efectuar la recolección. Sabe que el día 1 de julio podría recolectar 2000 Kg y vender las patatas a 30 ptas. por kilo. Por cada día que pase el labrador podría cosechar 120 Kg más pero el precio de las patatas bajaría una peseta por kilo, aunque tiene un mínimo garantizado de 10 ptas. por kilo. ¿Cuál es el momento en que el labrador debe recolectar las patatas para obtener un máximo beneficio?

23. ¿Qué significa la expresión "los precios del petróleo están subiendo más lentamente"? ¿Y la expresión "en los últimos meses se ha producido un cambio de tendencia en el paro"?

24. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio 1.

25. Un fabricante puede producir un determinado producto a un coste de 500 pesetas cada unidad y estima que si se venden a x pesetas cada unidad, entonces las ventas serán aproximadamente de $v(x) = 1000e^{-0.01x}$ unidades. ¿Cuál debería ser el precio al que debería vender el producto para obtener el máximo de beneficio.

26. Un cartero dedica diariamente 3 horas a clasificar su correo. El cartero es capaz de clasificar $C(t) = -t^3 + 9t^2 + 300t$ cartas al cabo de t horas. ¿En qué momento está el cartero clasificando cartas con máxima rapidez?

27. Representa gráficamente las funciones siguientes

a) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.
b) $f(x) = \dfrac{x^3+x}{2x+1}$.
c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{5x^2+4x}$.

28. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
b) $f(x) = x^4 - x$.
c) $f(x) = x^4 - 4x^2$.

29. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln|x|$.
b) $f(x) = e^x + e^{-x}$.
c) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

30. La producción semanal de una cierta fábrica viene dada por $P(t) = 20000 \cdot \sqrt{t}$ donde t es el número total de horas trabajadas. Actualmente la totalidad de los operarios trabaja 1000 horas por semana. Usa la diferencial para estimar la reducción de la producción si durante la próxima semana se trabaja un total de 950 horas.

31. Prueba que las gráficas de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$ tienen rectas tangentes perpendiculares entre sí en los puntos de intersección de sus gráficas.

32. Sabiendo que $\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, determina de forma aproximada $\operatorname{sen}(30°1')$ usando la diferencial.

33. *Salirse por la tangente:* Un astronauta está realizando un viaje espacial siguiendo una órbita plana y parabólica y acercándose a su nave nodriza. Respecto a determinados ejes dicha órbita tiene de ecuación $y = x^2$ y la nave nodriza está situada en el punto $(2, 4)$. ¿Cuándo debe desconectar los cohetes para que el astronauta vaya directamente hacia la nave nodriza?

34. Determina los máximos y mínimos relativos de las funciones f y g definidas por $f(x) = a^2 x e^{-ax}$, donde $a > 0$ y $g(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, respectivamente.

35. Se sabe que tres números a, b y c suman s y están en progresión geométrica, es decir, $b = a \cdot r$ y $c = b \cdot r$ para algún $r > 0$. Determina el máximo y el mínimo relativo del producto $a \cdot b \cdot c$.

36. Una persona que mide 180 cm de altura se aleja, en línea recta, de una farola cuya lámpara está a 8 metros de altura a una velocidad de $0,3$ metros por segundo.

a) Expresa el extremo de la sombra en función de la distancia de la persona a la farola.

b) ¿Con qué velocidad se mueve el extremo de la sombra?.

c) ¿A qué ritmo cambia la longitud de la sombra?